

Análisis y simulación de un péndulo balancín

Juan David Gaviria Cadavid, Cristian Camilo Rendón Cardona

Resumen—El péndulo es un ejemplo clásico en el estudio del control de sistemas dinámicos gracias a que incluye múltiples fenómenos como oscilaciones, zonas lineales y no lineales, puntos de equilibrio estables e inestables, entre otros permitiendo la fácil aplicación de conceptos matemáticos y físicos implementados en el análisis y control de sistemas. En el presente trabajo se analiza un balancín correspondiente a un modelo pendular utilizando MATLAB y su herramienta Simulink con el objeto de simular el sistema bajo diferentes entradas, se evidencia la variación de la respuesta del modelo no lineal respecto al lineal a medida que la entrada se aleja del punto de operación en continuo y en discreto para diferentes tipos de entrada, posteriormente se analiza la incidencia de algunos parámetros en la estabilidad del sistema definiéndose la relación entre la fricción del medio y el factor de amortiguamiento y finalmente se analiza la estabilidad del sistema, la respuesta en el dominio de la frecuencia y el comportamiento de ambos sistemas ante un control PID y por realimentación del estado.

Palabras Clave—Péndulo, Balancín, Modelación matemática, Sistemas dinámicos, Control.

I. INTRODUCCIÓN

ANÁLISIS de un balancín pivotado a una distancia arbitraria de su centro de masa. Mediante la modelación y simulación de las ecuaciones en el espacio de estado y usando la herramienta simulink de Matlab se realizan comparaciones entre las entradas y las salidas, modificando: a) las entradas, b) dos de los parámetros del sistema; estableciendo la comparación entre solución de las ecuaciones diferenciales del sistema mediante métodos numéricos y los resultados simulados.

Pese a que el comportamiento del sistema atañe al de un sistema pendular, no se halla en la literatura ejemplos semejantes, por lo cual, la comprobación de las ecuaciones modeladas presenta algunas limitaciones al igual que la posibilidad de la construcción de un prototipo; el proyecto se realiza durante el semestre calendario 2018-2 concerniendo a una investigación explicativa desde la perspectiva ofrecida por el estudio de los sistemas lineales. El proyecto se justifica en la importancia de la que goza el control y comprensión de sistemas dinámicos en la actualidad debido al auge de los vehículos, máquinas y/o sistemas autónomos; con lo cual, se acrecienta la necesidad de complementar la formación profesional de ingenieros con conocimientos de modelado, análisis matemático y control mediante software especializado en considerables ramas de la ingeniería.

Un modelo similar fue estudiado por Vladimir Viltres La Rosa de la universidad de Valladolid pivotando el sistema únicamente en el centro de masa de la barra y aplicando un control PI para estabilizar la posición de la masa (en dicho caso un motor DC) en un ángulo definido por la fuerza de empuje, sin embargo, la ecuación diferencial presentada en dicho documento no incluye el término $\dot{\theta}$ correspondiente al cambio de ángulo respecto al tiempo ni estudia el comportamiento

de la barra pivotada en un punto distinto al centro de masa que modifica el valor de la inercia total del sistema lo cual corresponde a un caso más general no ideal de este montaje.

Planteando como meta explicar con dominio el comportamiento del sistema se plantean las siguientes preguntas:

1. Siendo ' c ' la distancia del centro de masa de la barra al centro de rotación del sistema ¿ existe un valor de c que haga que el sistema se desestabilice?
2. ¿Qué magnitud de una entrada escalón hace que el balancín se quede dando vueltas (sea inestable)?
3. ¿Cuál es la magnitud de un impulso discreto para que el balancín de una vuelta?
4. ¿Hay diferencia en el comportamiento del sistema dependiendo del tipo de control utilizado?
5. ¿Puede establecerse que entre los métodos de control analizados alguno es mejor que otro?

Los sistemas pendulares tienen un amplio estudio en los campos de física y control y existen modelos que explican el comportamiento no lineal de este tipo de sistemas, se pretende mediante la variación de algunos parámetros observar cuantitativamente cómo éstos influyen en la respuesta del sistema y cómo dicha respuesta sigue presentando un comportamiento no lineal; para el presente trabajo se plantean los siguientes objetivos:

1. Realizar la simulación y análisis del sistema dinámico no lineal para observar la variación de la respuesta ante diferentes tipos de entrada o el cambio en uno de sus parámetros.
2. Linealizar el sistema alrededor de un punto de operación para analizar la semejanza entre la respuesta del sistema lineal y el no lineal.
3. Analizar la estabilidad, respuesta frecuencial y controlabilidad del sistema en tiempo continuo y discreto.
4. Observar y contrastar las respuestas del modelo ante diferentes tipos de control con el fin de seleccionar el más apto para el sistema no lineal.

En la sección I INTRODUCCIÓN se enuncia el planteamiento del problema mediante la descripción del sistema mencionando limitaciones del proyecto, la justificación de su realización y se menciona además el documento guía del cual se toma la idea, también se hace mención a los objetivos del proyecto y las preguntas e hipótesis en las que se basa. En la sección II METODOLOGÍA se presenta el bosquejo del sistema revelando la configuración de fuerzas que se analiza y posteriormente se muestran la ecuación diferencial y ecuaciones de estado, adicionalmente, se enuncian las distintas entradas con las que se evaluó la respuesta del sistema y los métodos numéricos usados para la solución de dichas ecuaciones. III RESULTADOS se describe los resultados de las simulaciones realizadas en simulink, se describe la

respuesta según la variación de la naturaleza de la entrada y se presenta el diagrama de simulación implementado, por último se describe el comportamiento de lo observado en la respuesta del sistema al variar dos de los parámetros y la descripción de las respuestas del sistema generadas por los métodos numéricos utilizados. En la sección IV ANÁLISIS se analiza a detalle las gráficas de interés de la sección resultados y se interpreta la información que estas contienen. Finalmente se presenta la sección V CONCLUSIONES con lo concluido a partir de la discusión e interpretación de lo simulado en toda la práctica.

II. METODOLOGÍA

II-A. Validación del modelo

Los modelos hallados en la literatura sobre el estudio de este tipo de péndulos toman en cuenta consideraciones similares a las del presente trabajo, sin embargo, difieren en algunas otras que imposibilitan una comprobación a partir de resultados idénticos, por ejemplo, en el presente se consideran la fricción que se presenta entre el medio y la barra y los momentos de inercia generados en el pivote por la masa de la misma; por esta razón se recurre a la comprobación del sistema mediante simulación evaluando los comportamientos del modelo corresponden a los esperados físicamente.

II-B. Modelación matemática del sistema

El sistema de péndulo - balancín implementado en este proyecto se describe y explica en [1]. Como se muestra en la Fig. 1, se agrega la distancia del centro de masa de la barra al punto pivote como un nuevo parámetro. Aunque físicamente las distancias siempre son positivas, c puede tomar un valor negativo cuando se quiere que el centro de masa se encuentre a la izquierda del punto pivote. Esto tiene influencia en el signo del momento generado sobre el punto pivote de la barra.

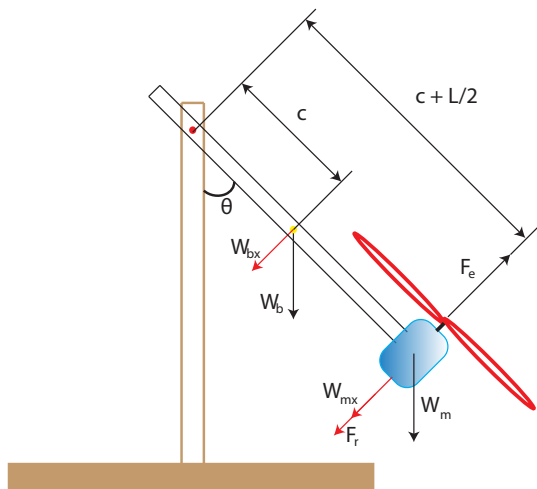


Fig. 1. Sistema de péndulo-balancín con hélice

Donde F_e : Fuerza de empuje generada por el motor. F_r : Fuerza de rozamiento. W_b : Peso de la barra. W_m : Peso del motor. c : Distancia desde el eje de rotación hasta el

centro de gravedad de la barra. L : Longitud de la barra. Para simplicidad de las ecuaciones se dice que:

$$d = c + \frac{L}{2}$$

La ecuación diferencial se obtiene a partir del planteamiento de una ecuación de rotación análoga a la segunda ley de Newton $F = ma$.

$$\sum \vec{r} \times \vec{F}_{ext} = I\vec{\alpha} \quad (1)$$

Se halla la aceleración angular de la barra.

$$\ddot{\theta} = \frac{F_e d}{I_T} - \frac{W_b \sin(\theta) c}{I_T} - \frac{f \dot{\theta} d}{I_T} - \frac{W_m \sin(\theta) d}{I_T} \quad (2)$$

Esta ecuación se lleva a la forma equivalente para representar el sistema en ecuaciones de espacio de estado usando variables de fase.

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta \\ x_2 &= \dot{\theta} \\ \dot{x}_1 &= \dot{\theta} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{\theta} \\ u &= F_e \end{aligned}$$

Reemplazando en (2)

$$\dot{x}_2 = -\frac{fd}{I_T} x_2 - \frac{(m_m d + m_b c)g}{I_T} \sin(x_1) + \frac{ud}{I_T}$$

II-C. Ecuación de espacio de estado

1. Variables de estado

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta && \text{Ángulo del péndulo desde la vertical} \\ x_2 &= \dot{\theta} && \text{Velocidad angular del balancín} \\ u &= F_e && \text{Fuerza de empuje aplicada por el motor} \end{aligned}$$

2. Ecuación de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{fd}{I_T} x_2 - \frac{(m_m d + m_b c)g}{I_T} \sin(x_1) + \frac{ud}{I_T} \end{aligned} \quad (3)$$

3. Ecuación de salida

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Los valores para los parámetros implementados en la simulación se muestran en la tabla I

TABLA I
PARÁMETROS DE SIMULACIÓN

Parámetro	Valor
L	1
m_b	0.5
c	0
m_m	1
g	9.81
f	0.5

Se analiza la respuesta del sistema en posición y velocidad angular aplicando diferentes entradas y variando parámetros. Las entradas que aplican al sistema son:

1. Escalón
2. Impulso
3. Sinusoidal
4. Tren de impulsos

Para el análisis de los diferentes parámetros no se aplica ninguna entrada al sistema, sino que se suelta desde un posición inicial de $\theta = \pi/2$. Los parámetros que se varían durante el análisis son la distancia c y la gravedad, simulando el comportamiento del péndulo con la gravedad de otros planetas (e.g. Mercurio, Venus, Júpiter) y compararlo con el de la Tierra.

II-D. Simulación del sistema

La simulación del sistema se realiza mediante la herramienta Simulink de MATLAB haciendo uso del álgebra de bloques para representar las ecuaciones de estado del sistema, también se utilizan funciones del paquete de MATLAB para sistemas lineales como $tf()$ $c2d()$ $bode()$ $rlocus()$ entre otras que facilitan las etapas del análisis del sistema.

II-E. Métodos numéricos de Euler y Runge-Kutta

Para la solución de las ecuaciones de estado se implementan los métodos de Euler y Runge-Kutta.

El método de Euler es un método de integración numérico para la solución de ODE's con condiciones iniciales. El método es usado para aproximaciones iniciales debido a su baja precisión. Se obtiene un paso como se muestra en la ecuación (5).

$$h = \frac{x_f - x_0}{n} \quad (5)$$

Donde n es el número de puntos que se desean obtener. Luego de definir el paso se obtiene los puntos $n + 1$ aplicando una aproximación por diferencias finitas de la forma:

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}) \quad (6)$$

Donde $f(x_{i-1}, y_{i-1})$ es la derivada en el punto anterior. Para el sistema de péndulo balancín se escogió un paso y se aplicó la ecuación (6) a los dos estados del sistema.

$$x_{1_i} = x_{1_{i-1}} + h\dot{x}_{1_{i-1}}$$

$$x_{2_i} = x_{2_{i-1}} + h\dot{x}_{2_{i-1}}$$

Los métodos de Runge-Kutta son una familia de métodos para la solución numérica de ecuaciones diferenciales, para este caso se aplica el método de Runge-Kutta 4 el cuál tiene la forma:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (7)$$

Donde las k se obtienen de la forma

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h) \\ k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h) \\ k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h) \end{cases}$$

Donde $f(x_i, y_i)$ es la derivada. La referencia [2] presenta información más detallada de los métodos.

II-F. Linealización

Para la linealización del sistema es necesario escoger un punto de operación, para ello, se grafica la curva de linealidad del sistema. Esta gráfica se logra obteniendo los valores en los que el sistema se estabiliza para varias entradas. En la Fig. 2 se muestra el diagrama de bloques implementado en Simulink a partir del cual se obtiene la curva de linealidad.

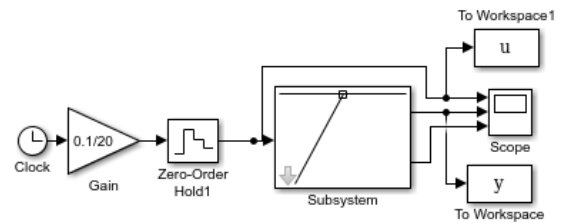


Fig. 2. Diagrama de Simulink para la obtención de la curva de linealidad. Se aplica una ganancia de 0.1 a la entrada cada 20 segundos

A partir de la curva de linealidad se selecciona un punto de equilibrio como punto de operación para el análisis del sistema. Posteriormente, se hallan los valores de la entrada para los cuales el sistema es estable, igualando las ecuaciones de estado a 0 y comprobando que con el valor de la entrada escogido el sistema se estabilice en el punto de operación seleccionado.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 \\ \dot{x}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

El sistema se linealiza alrededor del punto de operación aplicando el Jacobiano a las ecuaciones de estado y se evalúa en el punto de operación para obtener las matrices **A**, **B**, **C** y **D** que forman la ecuación de estado en el espacio de estado lineal que se presenta a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{aligned} \quad (9)$$

Donde,

$$\mathbf{A} = J_F(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = J_F(u_1, \dots, u_m) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = J_F(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = J_F(u_1, \dots, u_m) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_p}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial y_p}{\partial u_m} \end{pmatrix}$$

Siendo n el número de variables de estado, m el número de entradas y p el número de salidas.

II-G. Función de transferencia en tiempo continuo y discreto

La Función de transferencia en tiempo continuo del sistema se obtiene realizando la transición de ecuación de estado a función de transferencia como se muestra en la ecuación (10).

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (10)$$

La función de transferencia en discreto se obtiene a partir de la discretización de la ecuación de estado lineal por lo cual se discretiza el sistema aplicando la ecuación (11)

$$\mathbf{X}(T_s(k+1)) = \Phi\mathbf{x}(T_s k) - \Gamma u(T_s k) \quad (11)$$

Donde,

$$\Phi = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}$$

$$\Gamma = \mathbf{A}^{-1}(\Phi - \mathbf{I})\mathbf{B}$$

La selección del período de muestreo se realiza a partir del valor del tiempo de crecimiento del sistema, que es el tiempo en el que el sistema se tarda en llegar el 10% al 90% del valor de estabilidad.

La linealización del sistema con el software MATLAB se realiza con la función *linmod* que entrega las matrices de la ecuación de estado lineal. La función de transferencia se obtiene con la función *tf(sys)* la cual retorna la función de transferencia del sistema a partir de la ecuación lineal del sistema. Finalmente la discretización del sistema se realiza con la función *c2d*.

II-G1. Comparación del sistema lineal con el no lineal:

Para comparar el sistema lineal y el no lineal se debe tener en cuenta que el primero se obtuvo al rededor de un punto de operación, lo que indica que el sistema depende de variables incrementales, por lo tanto, para compararlo con el sistema no lineal es necesario realizar la relación entre las entradas y las salidas del sistema como se muestra en la Fig. 3.

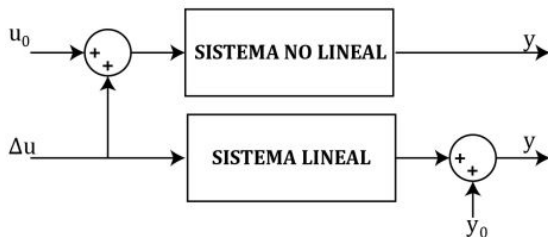


Fig. 3. comparación entre el sistema lineal y el no lineal

II-G2. *Secuencia de ponderación:* La secuencia de ponderación se obtiene con la transformada z inversa de la función de transferencia en tiempo discreto, aplicando la propiedad de la transformada z para la convolución de funciones:

$$\zeta^{-1}\{G(z)U(z)\} = \zeta^{-1}\{U(z)\} * \zeta^{-1}\{G(z)\}$$

El teorema de convolución en tiempo discreto dice:

$$f(k) * g(k) = \sum_{i=0}^k f(i)g(k-i) \quad (12)$$

A partir de de la ecuación (12) se puede obtener la respuesta del sistema a cualquier entrada teniendo en cuenta que $G(z) = Y(z)/U(z)$.

II-H. Estabilidad local con diagrama de fase

Se desea analizar la estabilidad local del sistema para una entrada $u = 6$ graficando x_2 vs x_1 . De esta manera se pone define un ϵ y un δ para probar la estabilidad local del sistema no lineal. Las condiciones iniciales del sistema se cambian para que se encuentren dentro de δ y se realiza la simulación con la misma entrada. Finalmente se grafica este segundo resultado para ver el comportamiento.

II-I. Estabilidad lineal

El análisis de estabilidad lineal mediante Routh - Hurwitz se hace para el parámetro 'c', este parámetro es de sumo interés por que determina el intervalo para el cual los momentos de inercia generados por la barra en el centro de rotación del sistema cuando este se empieza a alejar de su centro de masa, no permiten la estabilidad del balancín.

Para determinar el intervalo de 'c' no es necesario realizar el arreglo de Routh-Hurwitz debido a que el sistema es de orden dos y las condiciones necesarias son suficientes.

$$a_i > 0$$

II-J. Reducción del orden

Debido a que el sistema analizado es de orden 2 y presenta oscilaciones por la existencia de polos en el eje imaginario, el orden del sistema no se puede reducir; un sistema de orden 1 no es una buena aproximación al sistema real dada la imposibilidad de los sistemas de orden 1 para presentar oscilaciones por tener su único polo en el eje real.

II-K. Lugar de las raíces

Para el análisis de estabilidad a partir de Root - Locus se selecciona el parámetro 'f' que representa el coeficiente de fricción del medio en el cual está inmerso el balancín, este parámetro es de interés por que permite establecer la influencia de la fricción dinámica en la estabilidad del sistema; en términos físicos esta fricción representa de la viscosidad del fluido que matemáticamente corresponde al coeficiente de amortiguación en la función de transferencia.

Mediante el comando *rlocus()* se obtiene el la gráfica del lugar de las raíces para el parámetro mencionado utilizando la forma del polinomio $P(s) = 1 + kG(s)$:

II-L. Análisis frecuencial

La gráfica de la respuesta frecuencial del sistema en continuo y discreto se realiza mediante el comando **bode()**; usando la opción 'characteristics' de la gráfica de bode en MATLAB se obtiene la frecuencia de resonancia y el margen de pico; mediante el trazo de una línea 3 db por debajo del margen de ganancia en el instante inicial se obtiene el valor del Ancho de banda y por último se comprueba en el diagrama de bode en discreto que la Frecuencia de Nyquist sea equivalente a la Frecuencia de muestreo dividida 2 según el teorema de Shanon. Para verificar que el sistema sea de fase mínima se comprueba que $-90 \times (\text{orden relativo})$ sea igual al cambio total de fase.

Para hallar los márgenes de estabilidad con bode se traza una línea horizontal en 0 db en el diagrama de ganancia, el punto donde dicha línea corte la gráfica es llamado frecuencia de cruce de ganancia, a partir de este, se traza una línea vertical y se observa dónde corta la gráfica de fase, en este punto se traza de una línea horizontal, se realiza el mismo procedimiento pero iniciando desde el diagrama de fase en -180 grados, en este caso el punto de corte es llamado frecuencia de cruce de fase, de esta forma se encuentran los márgenes de ganancia y fase que definen los márgenes de estabilidad.

II-M. Controlabilidad

El análisis de controlabilidad permite identificar si el sistema lineal se puede controlar llevando el sistema a una referencia deseada. Para el análisis es necesario obtener la matriz de controlabilidad

$$\begin{aligned} M_c &= [\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \dots \quad \Phi\Gamma^{n-1}] && \text{Discreto} \\ &= [B \quad AB \quad \dots \quad AB^{n-1}] && \text{Continuo} \end{aligned}$$

La condición necesaria y suficiente para que el sistema sea controlable es:

$$\text{rango}(M_c) = n$$

Donde n es el orden del sistema.

También es importante analizar el número de condición de la matriz de controlabilidad, en especial para el caso discreto. El número de condición indica la sensibilidad al control, ya que si una matriz presenta una alta condición implica que se necesita un alto esfuerzo de control y, por lo tanto, el sistema realmente no es controlable o es muy difícil de controlar.

II-N. Control PID

Para el control PID del sistema se calculan los parámetros con los métodos heurísticos de Ziegler - Nichols (Tabla II) y Chien - Hrones - Reswick (Tabla III). También se realiza la sintonización de los parámetros y se comparan los resultados.

TABLA II
MÉTODO ZIEGLER-NICHOLS

Acción	K_p	T_i	T_d
P	1/RL	-	-
PI	0.9/RL	3L	-
PID	1.2/RL	2L	0.5L

TABLA III
MÉTODO CHIEN - HRONES-RESWICK

Mp	0%			20%		
Acción	K_p	T_i	T_d	K_p	T_i	T_d
P	0.3/RL	-	-	0.7/RL	-	-
PI	0.6/RL	4L	-	0.7/RL	2.3L	-
PID	0.95/RL	2.4L	0.42L	1.2/RL	2L	0.42L

Una vez obtenidos los parámetros y con el periodo de muestreo definido (T_s), la función de transferencia del control PID discreto es:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{z(z-1)},$$

donde q_0, q_1 y q_2 son

$$\begin{aligned} q_0 &= K_p \left(1 + \frac{T_s}{2T_i} + \frac{T_d}{T_s} \right) \\ q_1 &= -K_p \left(1 - \frac{T_s}{2T_i} + \frac{2T_d}{T_s} \right) \\ q_2 &= \frac{K_p T_d}{T_s}. \end{aligned}$$

II-Ñ. Control PID por ubicación de polos

El método de control PID por asignación de polos consiste en ubicar los polos del sistema en algún lugar de manera que el sistema se comporte según se desea mediante un polinomio que se obtiene con la función de transferencia del controlador y la de la planta, en este caso en discreto:

$$G_p(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 + z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n},$$

$$G_c(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{(z-r_1)(z-1)}.$$

Posteriormente se obtiene la función de transferencia en lazo cerrado del sistema con el fin de determinar la estabilidad a partir de la ecuación característica:

$$Pc(z) = A(z)P(z) + B(z)Q(z)$$

El controlador PID que se quiere obtener debe permitir asignar los polos donde se desean, cada f_i se especifica según los requerimientos de diseño.

$$Pc(z) = (z-f_1)(z-f_2),$$

II-O. Realimentación del estado por ubicación de polos

Para controlar el sistema por realimentación del estado, es necesario calcular la constante K que multiplica a la variable de estado. esta se calcula con la función **acker()** de MATLAB ya que el sistema sólo tiene una entrada. por lo tanto, la realimentación del sistema es de la forma

$$u(k) = -Kx(k),$$

II-P. Pasos para elaborar el presente trabajo

1. Obtención de las ecuaciones diferenciales del modelo a partir de ecuaciones físicas.
2. Representación en el espacio de estado de las ecuaciones diferenciales.
3. Implementación de las ecuaciones de estado en diagramas de bloques para simular el sistema.
4. Simulación del sistema con diferentes tipos de entrada.
5. Implementación de métodos numéricos para la solución de las ecuaciones diferenciales del sistema.
6. Comparar las soluciones numéricas con las simulaciones.
7. Obtención de la curva de linealidad a partir de la simulación del sistema en Simulink.
8. Selección del punto de interés de la curva de linealidad como punto de operación.
9. Linealización del sistema con MATLAB y analíticamente en el punto de operación.
10. Selección del período de muestreo a partir de la simulación de la respuesta temporal del sistema en Simulink utilizando el tiempo de crecimiento (τ).
11. Obtención de las Funciones de transferencia en continuo y discreto mediante MATLAB y analíticamente.
12. Obtención de la Función de ponderación con el teorema de convolución.
13. Selección de parámetros para el análisis de estabilidad
14. Análisis de estabilidad del sistema mediante Routh-Hurwitz para el parámetro 1
15. Análisis de estabilidad con rootlocus para el parámetro 2
16. Obtención del diagrama de bode a partir de las ecuaciones de transferencia discreta y continua
17. Obtención de las características de la respuesta frecuencial a partir del diagrama de bode
18. Comprobar que el sistema es de fase mínima
19. Discretizar el sistema analíticamente y con MATLAB utilizando el periodo de muestreo escogido.
20. Realizar el análisis de controlabilidad al sistema en tiempo discreto y continuo por medio de la matriz M_c .
21. Aplicar un control PID discreto empleando los métodos heurísticos para estimar los parámetros.
22. Diseñar un control por realimentación del estado.
23. Eliminar el error en estado estacionario del control por realimentación del estado.

III. RESULTADOS

III-A. Implementación en Simulink

Luego de representar el sistema por ecuaciones de espacio de estado, se realiza el diagrama de simulación en Simulink como se muestra en la Fig. 4. El color azul representa la variable x_1 y el naranja a la variable x_2 . Se agrega ruido blanco a cada una de las variables de estado.

El sistema está embebido en una máscara de simulación que tiene como entrada los parámetros L, m_m, m_b, c, g, f y las condiciones iniciales θ_0 y ω_0 . En la inicialización de la máscara se definen d e I , que dependen de los parámetros del sistema.

$$d = c + \frac{L}{2}$$

$$I = m_m d^2 + \frac{m_b(12c^2 L^2)}{12}$$

III-B. Respuesta a diferentes entradas

La respuesta a la entrada escalón se presenta en la Fig. 5, donde se aprecia un pico de 1.2 radianes para el ángulo de la barra. Se observa una velocidad máxima de 2 rad/s a los 4.5 segundos cuando la barra se encuentra a 0.8 rad. El tiempo de estabilización del sistema es de aproximadamente 15 segundos en 0.6 rad.

En la Fig. 6 se muestra la aplicación de un impulso discreto con duración de 0.1 segundos el cual hace dar una vuelta completa al péndulo, simulando un golpe en el sistema. Se aprecia que el sistema alcanza su máxima velocidad al momento del impulso. Se encuentra un mínimo en la velocidad entre los segundos 1 y 2 cuando el ángulo de la barra es aproximadamente 3.14 rad (180 grados). Finalmente el sistema se estabiliza a los 15 segundos aproximadamente en un ángulo de 6.24 rad.

La Fig. 7 presenta la respuesta a del sistema a una entrada sinusoidal. El sistema presenta intervalos de tiempo donde estabiliza en un movimiento armónico y, a continuación de dichos intervalos, ir decreciendo. Por último, en la Fig. 8 se observa la respuesta a un tren de impulsos unitarios donde tiene un comportamiento armónico con máximos ángulos de 0.2 y mínimos de -0.1.

III-C. Variación de parámetros

La variación de la distancia entre el punto pivote y el centro de masa de la barra se presenta en la Fig. 9a. Se observa que el sistema con mayor amplitud y tiempo de estabilización con un valor de $c = 0.5$ m. El sistema con menor amplitud y, a su vez, menor tiempo de estabilización es el que tiene $c = -0.25$ m. En el medio se encuentran $c = 0.25$ y $c = 0$ respectivamente. Para la velocidad angular se tienen respuestas similares pero desfasadas para valores de c entre 0 y 0.5 hasta los 4 segundos. El orden de estabilización es también el mismo mencionado para los ángulos (ver Fig. 10b).

En la Fig. 10 se presenta la respuesta del sistema para diferentes valores de la gravedad. La Fig. 10a muestra el ángulo de la barra para las diferentes gravedades, donde el máximo ángulo luego de soltar el balancín corresponde a la mayor gravedad así como el menor ángulo es para la menor gravedad. La frecuencia presenta la misma relación con la gravedad. La Fig. 10b presenta los valores de velocidad angular para las diferentes gravedades. Al igual que en la Fig. 10a los valores de máxima velocidad y frecuencia corresponden a los de mayor gravedad.

III-D. Métodos de Euler y Runge-Kutta

En las Figs. 11a y 11b se muestra los resultados de la solución de la ecuación de estado por los métodos de Euler y Runge-Kutta superpuestos a la respuesta obtenida en Simulink.

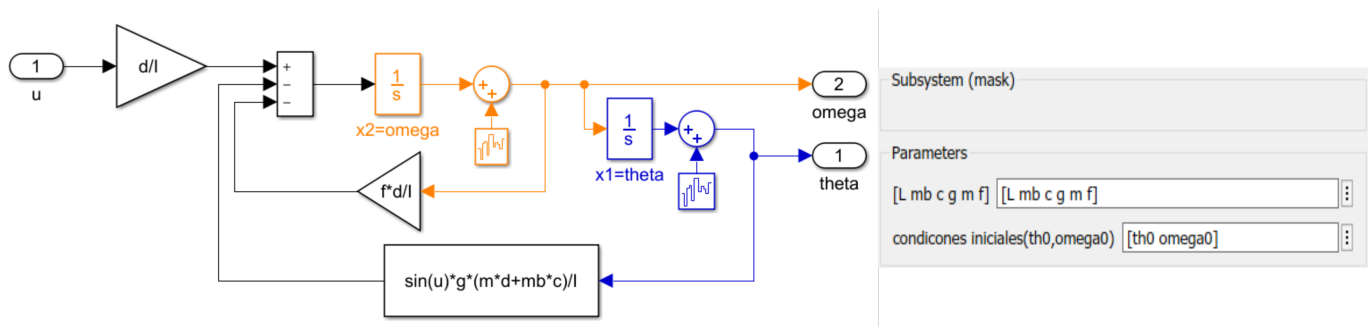
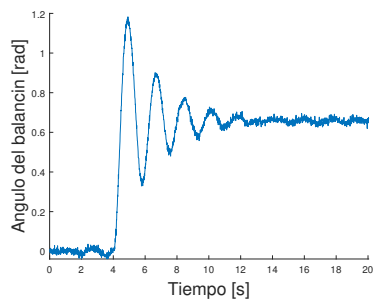
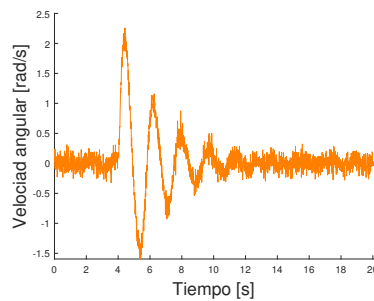


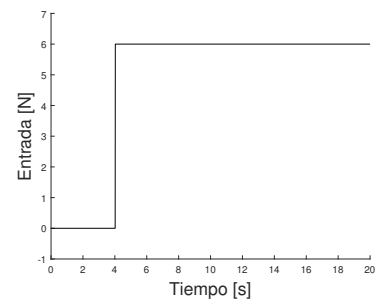
Fig. 4. Diagrama de simulación en Simulink con la máscara y sus entradas



(a) Ángulo del balancín

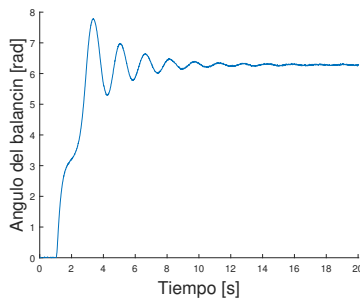


(b) Velocidad angular

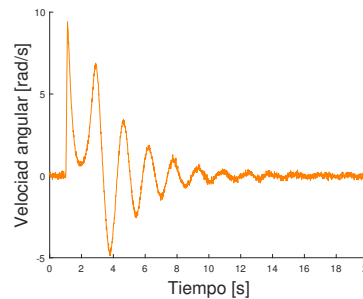


(c) Entrada

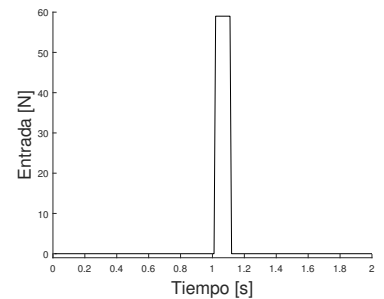
Fig. 5. Respuesta del sistema a una entrada escalón



(a) Ángulo del balancín, se aprecia que el punto de estabilización es de 360 grados

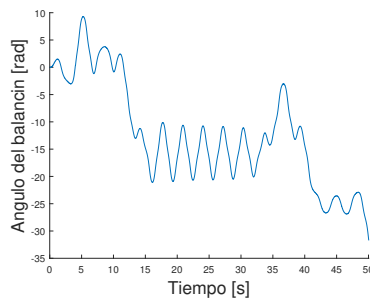


(b) Velocidad angular, máxima velocidad en $t = 1$

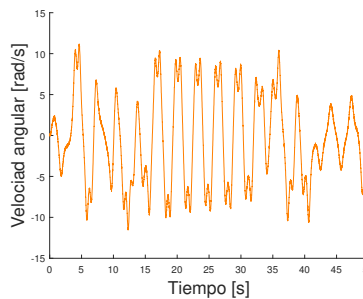


(c) Impulso discreto con amplitud de 60 N

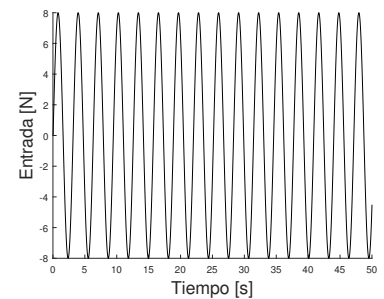
Fig. 6. Respuesta del sistema a un impulso discreto



(a) Ángulo del balancín



(b) Velocidad angular



(c) Entrada sinusoidal con frecuencia de 2 rad/s

Fig. 7. Respuesta del sistema a una entrada sinusoidal

III-E. Curva de linealidad

En la Fig. 12 se observa que el sistema presenta un comportamiento lineal para entradas hasta valores de 'u' entre

5 y 6. También se observa que luego de una entrada de 9.8 el sistema es inestable.

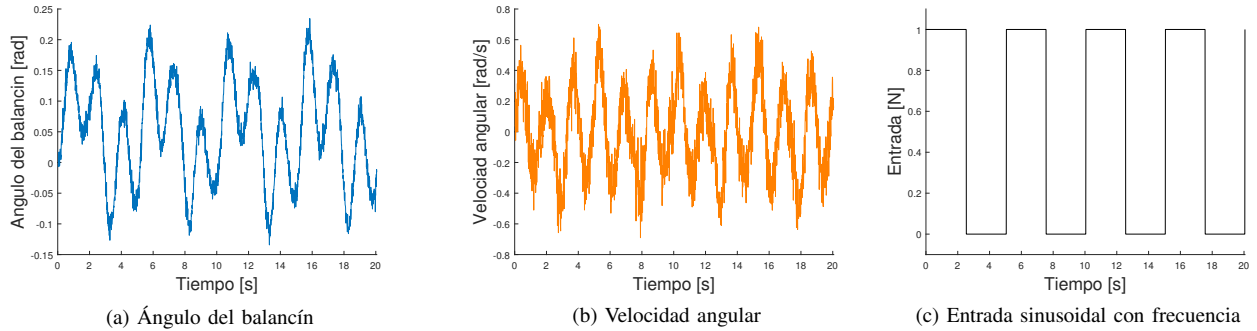
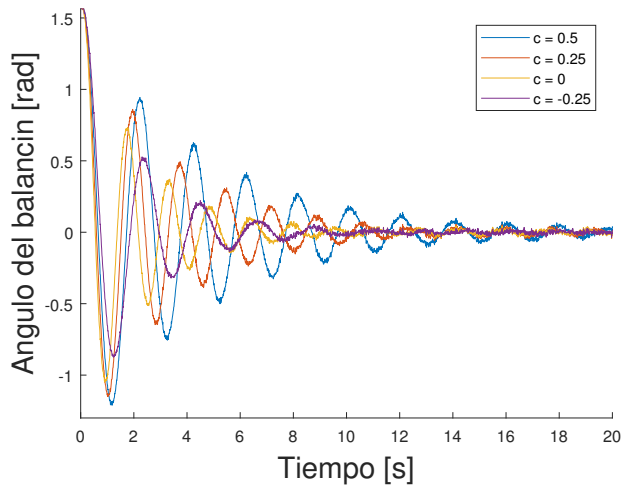
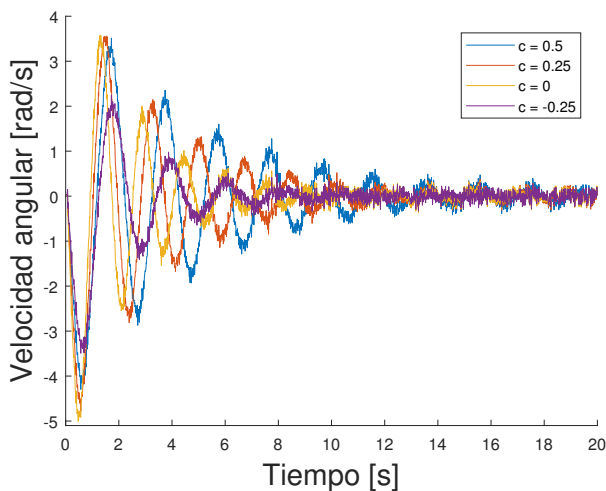


Fig. 8. Respuesta del sistema a una entrada sinusoidal



(a) Ángulo del balancín



(b) Velocidad angular

Fig. 9. Cambio en la distancia entre el punto pivote y el centro de masa de la barra

Se selecciona el punto de operación (0.6581,0) para una entrada $u = 6$, observando en la curva de linealidad que el sistema empieza a comportarse de forma no lineal.

III-E1. Puntos de equilibrio: Aplicando la ecuación (8) al sistema se hallan los puntos de equilibrio:

$$0 = x_2$$

$$0 = -\frac{fd}{I_T}x_2 - \frac{(m_m d + m_b c)g}{I_T} \sin(x_1) + \frac{ud}{I_T}$$

De lo anterior se obtiene que

$$x_2 = 0$$

$$x_1 = \sin^{-1} \left(\frac{ud}{(m_m d + m_b c)g} \right)$$

Con los parámetros que se presentan en la tabla I se obtiene que el sistema es estable si

$$-9.81 \leq u \leq 9.81$$

III-F. Linealización

Para la obtención de las matrices **A**, **B**, **C** y **D** se aplica el Jacobiano como se explica en la sección II-F a las ecuaciones de estado de la ecuación (3).

Se calculan las respectivas derivadas parciales

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} = 1 \quad \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} = \frac{-(m_m d + m_b c)g}{I_T} \cos(x_1) \quad \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = \frac{-fd}{I_T}$$

$$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial u} = \frac{d}{I_T} \quad \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial x_1} = 1 \quad \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial x_2} = 0$$

Donde encontramos que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = (1 \quad 0) \quad \mathbf{D} = 0$$

Con

$$k_1 = \frac{(m_m d + m_b c)g}{I_T} \cos(x_1)$$

$$k_2 = \frac{fd}{I_T} \quad k_3 = \frac{d}{I_T}$$

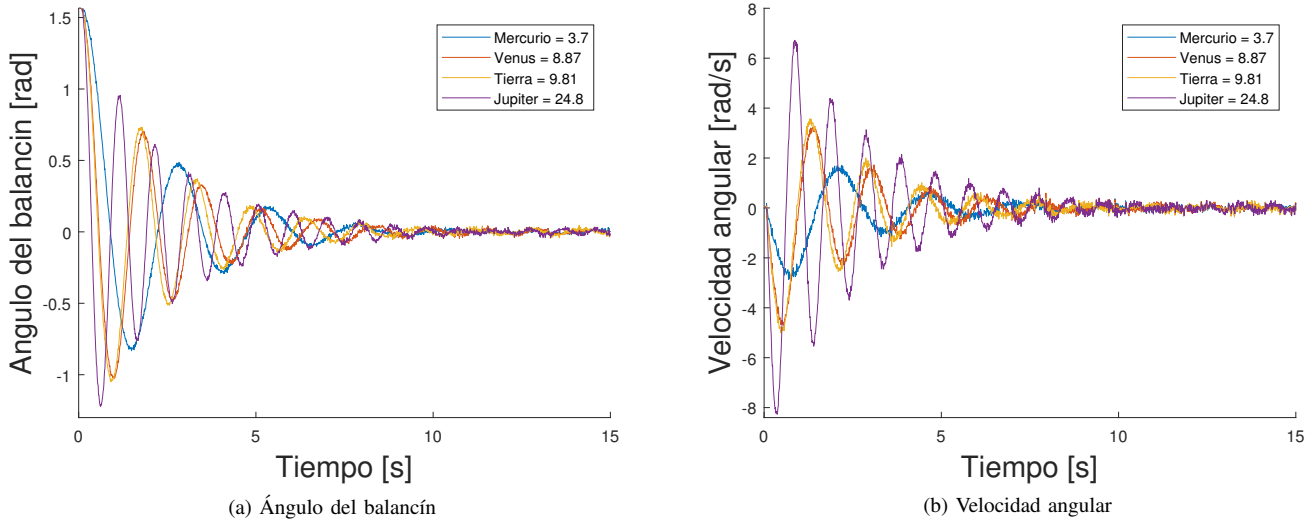


Fig. 10. Cambio en la aceleración de la gravedad

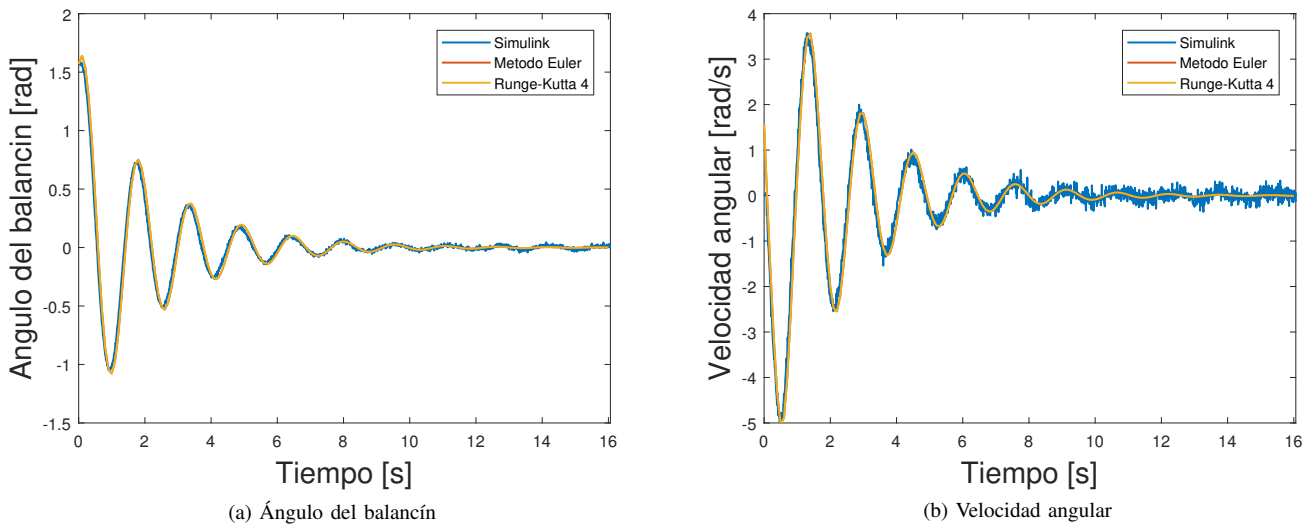


Fig. 11. Métodos de Euler y Runge-Kutta

Obteniendo la ecuación de espacio de estado lineal:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ k_3 \end{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= (1 \quad 0) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (13)$$

III-F1. Comparación del sistema lineal con el no lineal:

Se compara la respuesta del sistema lineal y no lineal para diferentes entradas, se eligen 3 entradas:

Fig. 13a, Entrada $\Delta u = -2$. Con esta entrada se observa que la respuesta de los tres sistemas inicia desde un ángulo de 0,65 rad hasta 0 rad y se mantiene igual en ese primer trayecto de la gráfica, cuando el ángulo empieza a crecer nuevamente se observa que mientras la respuesta del sistema lineal de la función de transferencia y en el espacio de estado permanece igual la del sistema no lineal comienza a alejarse

de los otros dos, esta condición aumenta hasta el punto de que el sistema no lineal se estabiliza en otro valor. Fig. 13b, Entrada $\Delta u = 0.1$ Con esta entrada, mas cercana al punto de operación respecto a la anterior se observa que la respuesta de los tres sistemas inicia y se mantiene igual hasta el punto de estabilidad. Fig. 13c $\Delta u = 2$ Con esta entrada se observa que los sistemas parten del mismo punto, sin embargo, el sistema no lineal comienza a variar su respuesta generando mayores sobre picos en cada oscilación respecto a los sistemas lineales que se mantienen iguales, el sistema no lineal estabiliza en un valor diferente mientras los sistemas lineales llegan al mismo valor.

La tabla IV presenta los errores en el valor de estabilización para las diferentes entradas.

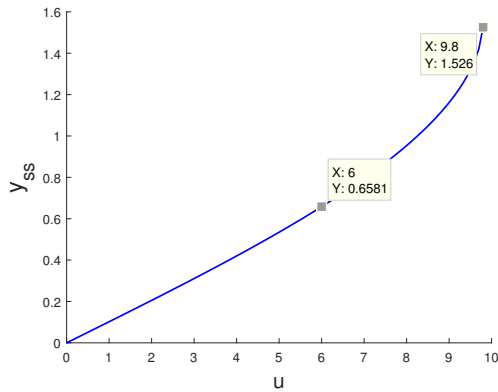


Fig. 12. Curva de linealidad para diferentes entradas de escalón. Se marca el punto de operación y la máxima entrada

TABLA IV
DIFERENCIA EN EL PUNTO y_{ss} ENTRE EL SISTEMA LINEAL Y EL NO LINEAL

Δu	Error
-2	0.019
0.1	7.6×10^{-5}
2	0.037

III-G. Función de transferencia del sistema

III-G1. Función de transferencia en tiempo continuo: Para obtener la función de transferencia del sistema a partir de la ecuación de estado se hace uso de la ecuación (10).

$$G(s) = \frac{k_3}{s^2 + k_2s + k_1} \quad (14)$$

Reemplazando los parámetros por los valores de la tabla I se obtiene que:

$$G(s) = \frac{1.714}{s^2 + 0.8571s + 13.3}$$

III-G2. Función de transferencia en tiempo discreto: Se aplica la ecuación (11) para obtener la ecuación de estado lineal en tiempo discreto, luego se hace uso de MATLAB para transformar la ecuación de estado en función de transferencia. A continuación se presenta el código:

```
syms s
phi = ilaplace(inv(s*eye(2) - A));
gamma = inv(A) * (phy-eye(2)) * B;
t = 0.1;
phy = eval(phy);
gamma = eval(gamma);
ss_disc = ss(phy, gamma, [1 0], 0, Ts);
fdt_disc = tf(ss_disc, Ts)
```

Del código anterior se obtiene que la función de transferencia discreta es

$$G(z) = \frac{0.00824z + 0.008007}{z^2 - 1.792z + 0.9179} \quad (15)$$

También se calculan las ecuaciones de estado y función de transferencia en tiempo continuo y discreto en MATLAB. A

continuación se presenta un ejemplo de la implementación de las funciones en MATLAB.

```
[A, B, C, D] = linmod(sys)
ecuacion_estado = ss(A, B, C, D)
fdt_continua = tf(ss_eq)
fdt_discreta = c2d(fdt_continua, 0.1)
```

La variables sys es el nombre del diagrama de bloques para el sistema no lineal, implementado en Simulink.

También se obtiene el espacio de estado lineal discreto con la función `c2d()` aplicada a las ecuaciones de estado en tiempo continuo.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}((k+1)T) &= \Phi(T)\mathbf{x}(kT) + \Gamma(T)\mathbf{u}(kT) \\ \mathbf{y}(kT) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) \end{aligned}$$

Donde

$$\Phi(T_s) = \begin{pmatrix} 0.936 & 0.09372 \\ -1.247 & 0.8557 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma(T_s) = \begin{pmatrix} 0.00824 \\ 0.1607 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

III-G3. Comparación de la FDT en tiempo continuo y discreto: En la Fig. 14a se observa que la respuesta temporal de los tres sistemas es la misma en los puntos donde la FDT discreta es constante, adicionalmente se ve que los tres sistemas se estabilizan en un valor entre 0.1 y 0.15 rad.

Para la respuesta al impulso unitario (Fig. 14b) los tres sistemas se comportan similar a lo largo del movimiento y se estabilizan en aproximadamente 0.

III-H. Función de ponderación

Para obtener la secuencia de ponderación se aplica la transformada inversa a la salida del sistema que se obtiene de la función de transferencia en tiempo discreto (ecuación (15)).

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

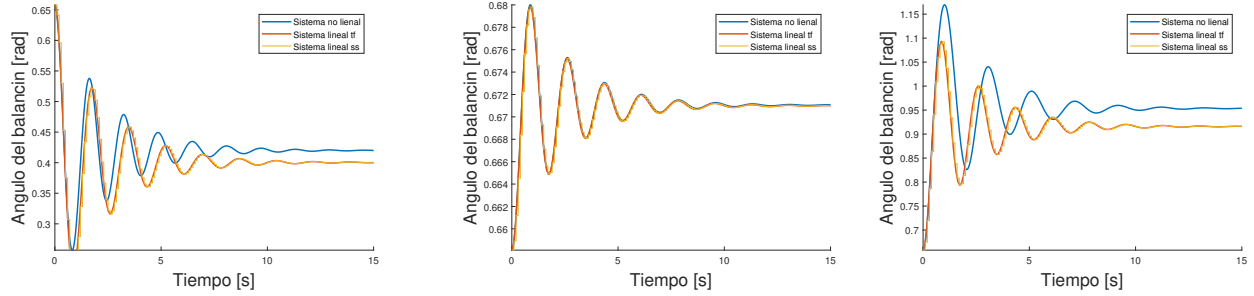
$$Y(z) = G(z)U(z)$$

Para calcular la transformada z, dividimos por z a ambos lados

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{G(z)U(z)}{z}$$

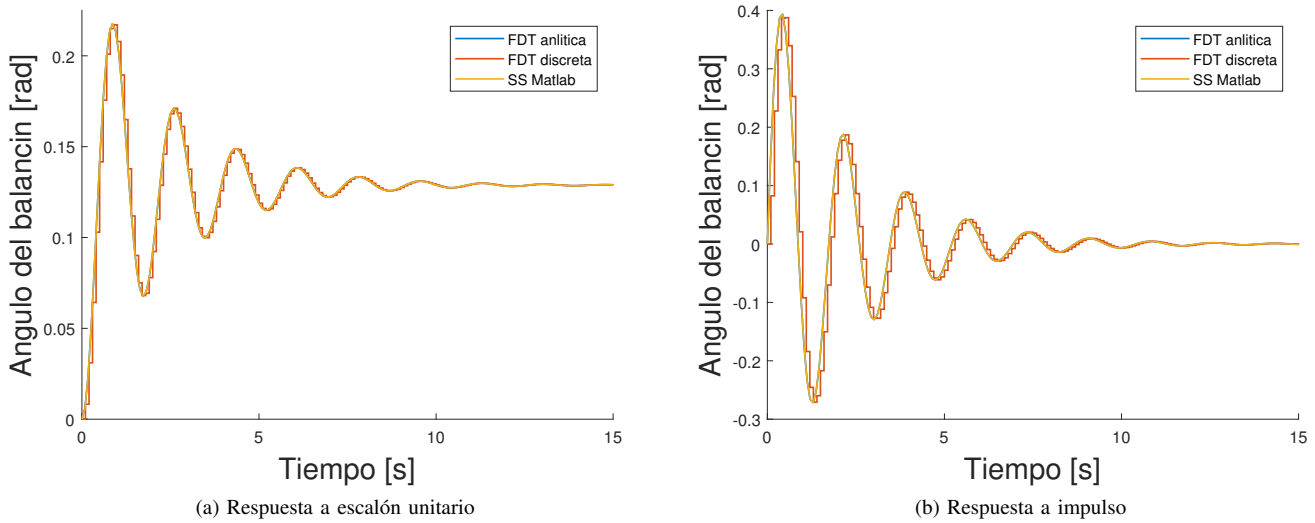
Se separan la entrada y la salida y se pasa la z a multiplicar

$$Y(z) = zG(z)\frac{U(z)}{z}$$



(a) Respuesta lineal y no lineal para $\Delta u = -2$ (b) Respuesta lineal y no lineal para $\Delta u = 0.1$ (c) Respuesta lineal y no lineal para $\Delta u = 2$

Fig. 13. Comparación del sistema lineal y no lineal para entradas lejos y cerca del punto de operación



(a) Respuesta a escalón unitario

(b) Respuesta a impulso

Fig. 14. comparación de las respuestas al escalón unitario e impulso de la función de transferencia y ecuación de estado en tiempo continuo y discreto

$$y(k) = \zeta^{-1}\{zG(z)\} * \zeta^{-1}\left\{\frac{U(z)}{z}\right\}$$

Como la entrada es un impulso unitario entonces $U(z) = 1$.

$$y(k) = \zeta^{-1}\{zG(z)\} * \zeta^{-1}\{z^{-1}\}$$

Donde el segundo término es un delta de Kronecker con un retardo de 1

$$y(k) = \zeta^{-1}\{zG(z)\} * \delta_{k-1}$$

La transformada inversa de $zG(z)$ se obtiene con MATLAB. Finalmente

$$y(k) = g(k) * y(k) = \sum_{i=0}^k g(i)y(k-i)$$

Se implementa en MATLAB la sumatoria y se obtiene la gráfica de la Fig. 15. La magnitud del impulso a sistemas en tiempo discreto aplicado por MATLAB es igual a $1/T_s$. Para este caso, con $T_s = 0.1$, la magnitud del impulso es de 10.

```
for k = 0:k_f
```

```
    suma(k+1) = 0;
    for i = 0:k
        u = 0;
        if ((k - i) == 1)
            u = 10;
        end
        suma(k+1) = suma(k+1) + y_k_c(i, u);
    end
end
```

Donde las y_k_c es $y(k)$ multiplicada por la variable u , que tiene un valor de 10 cuando $k-i = 0$.

En la Fig. 15 se observa que la respuesta al impulso continuo y discreto es la misma a través del tiempo mientras que la ponderada aunque se acerca a la respuesta se encuentra ligeramente desfasada respecto a las otras dos.

III-I. Análisis de estabilidad

III-11. Estabilidad local por diagrama de fase: En la Fig. 16 se observa que el sistema presenta un foco estable en $(0.6581, 0)$ para una entrada $u = 6$.

III-12. Estabilidad global del sistema lineal: Se calculan los valores propios de la matriz A obteniendo

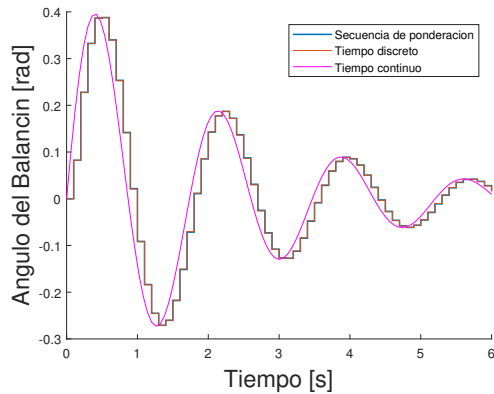


Fig. 15. Respuesta a u impulso calculada por la secuencia de ponderación y por MATLAB

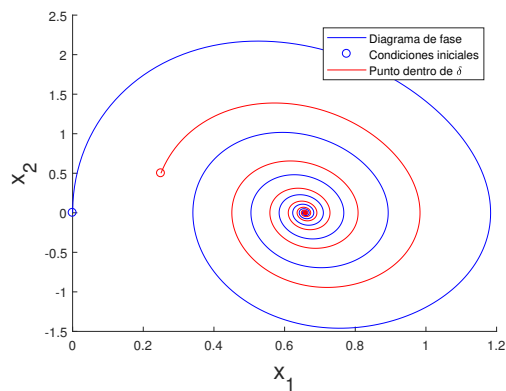


Fig. 16. Diagrama de fase para una entrada $u = 6$. La curva azul representa el diagrama de fase para condiciones iniciales $(0,0)$ y la roja para condiciones iniciales $(0.25,0.5)$

$$\lambda_1 = -0.43 + 3.62i \quad \lambda_2 = -0.43 - 3.62i$$

También se calcularon los polos de la función de transferencia a partir de las raíces del denominador

$$s = -0.43 + 3.62i \quad s = -0.43 - 3.62i$$

Como se puede apreciar, se obtuvieron los mismos valores por ámbos métodos.

III-13. Análisis de estabilidad por Routh Hurwitz: En la Fig. 17b Se observa que para el valor de $C = -1/3$ el sistema es inestable mientras en la Fig. 17a se observa que para $C = -0.32$ el sistema es estable, es importante observar que -0.32 es ζ que -0.33 .

En la Fig. 18a para un valor de $c = -0.32$ el sistema no lineal es inestable si la entrada $U=1$. En la Fig. 17b para un valor de $c = -0.33$ el sistema no lineal es inestable si la entrada $U=1$.

III-14. Root - Locus: De la función de transferencia en tiempo continuo (ecuación (14)) se obtiene el polinomio característico.

$$P(s) = s^2 + k_2s + k_1 \quad (16)$$

Donde

$$k_2 = \frac{fd}{I_T}$$

Como se pretende evaluar el lugar de las raíces para f se hace $f = K$

$$P(s) = s^2 + K\left(\frac{ds}{I_T}\right) + k_1$$

Donde

$$N(s) = \frac{ds}{I_T}D(s) = s^2 + k_1$$

Finalmente llevando se encuentra la función de transferencia en lazo cerrado

$$P(s) = 1 + KG(s) = 1 + K\frac{N(s)}{D(s)} = 1 + K\frac{\frac{d}{I_T}s}{s^2 + k_2}$$

La Fig. 19 presenta el lugar de las raíces graficado por la función `rlocus()` de MATLAB. Se observa que el sistema tiene un cero finito en $(0,0i)$ y un cero infinito en $(-\infty,0i)$. Además, presenta sus polos, para $f = 0$, se encuentran en $0 \pm 3.65i$. A medida que aumenta f , disminuye la magnitud de la parte imaginaria de los polos.

Para el presente valor del coeficiente de fricción f (0.5) se tienen unos polos de aproximadamente $-0.45 \pm 3.62i$.

III-J. Diagramas de Bode

En la Fig. 21 se observa que la magnitud del diagrama de bode no está por encima de cero, se observa que el pico de la ganancia es de -5.16 dB a una frecuencia de 3.6 rad/s, también se observa que el ancho de banda w_b es de 5.54 rad/s por último se puede observar usando los puntos del final del diagrama que la pendiente es igual a -40.43 dB/dec

También se observa que el cambio total de fase es igual a -180 .

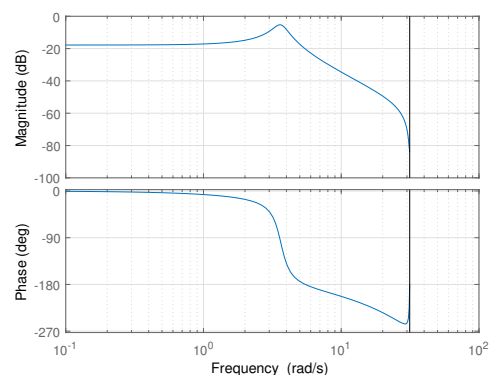
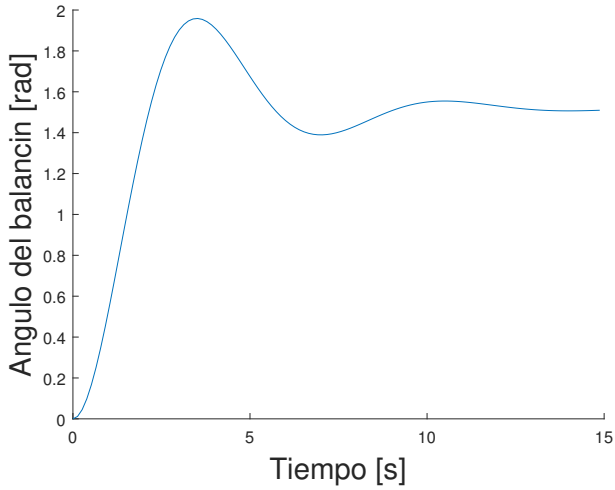
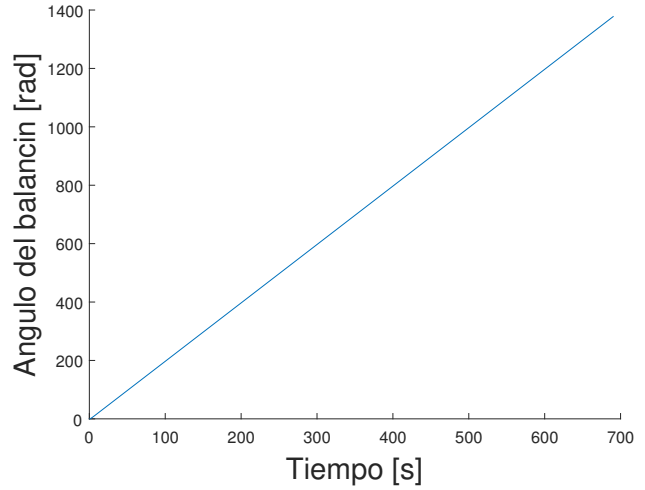


Fig. 21. Diagrama de bode en tiempo discreto

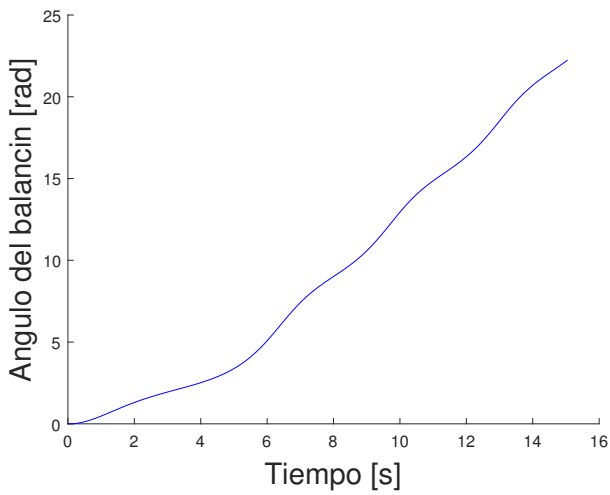


(a) Respuesta del sistema lineal con $c = -0.32$

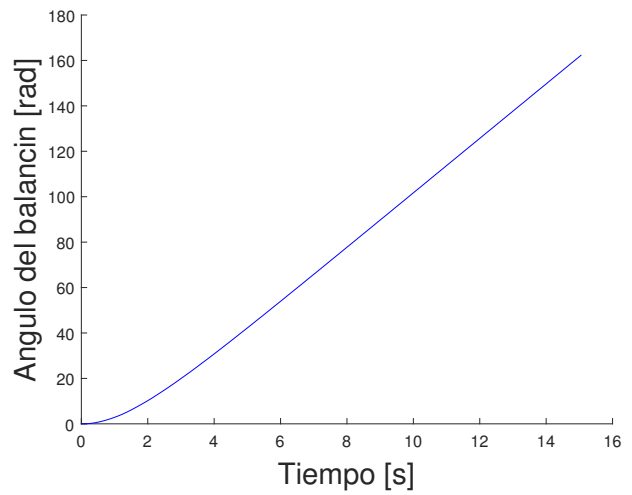


(b) Respuesta del sistema lineal con $c = -0.33$

Fig. 17. Comprobación del rango del parámetro 'c' para la estabilidad del sistema lineal



(a) Respuesta del sistema no lineal con $c = -0.32$ y entrada $u = 1$



(b) Respuesta del sistema no lineal con $c = -0.33$ y entrada $u = 1$

Fig. 18. Comprobación del rango del parámetro 'c' para la estabilidad del sistema no lineal

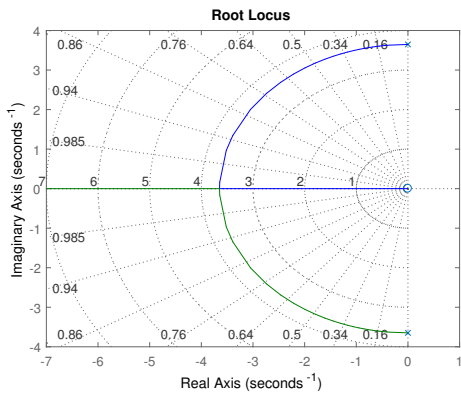


Fig. 19. Lugar de las raíces para el coeficiente de fricción

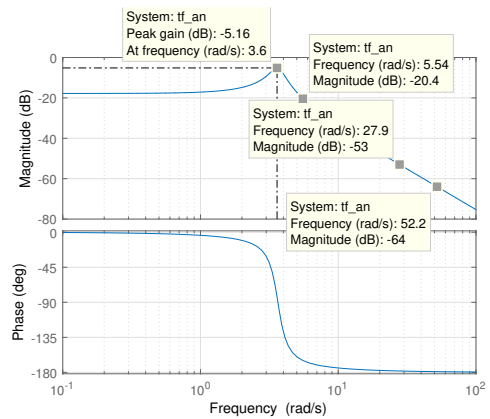


Fig. 20. Diagrama de bode para tiempo continuo

III-K. Controlabilidad del sistema

Las matrices de controlabilidad del sistema en tiempo continuo y tiempo discreto son:
Tiempo continuo

$$M_{cc} = \begin{pmatrix} 0 & 1.7143 \\ 1.7143 & -1.4694 \end{pmatrix}$$

y su número condición es 2.3. El rango de M_{cc} es

$$\text{rango}(M_{cc}) = 2.$$

De manera similar, la matriz de controlabilidad del sistema discreto es:

$$M_{cd} = \begin{pmatrix} 0.0082 & 0.0228 \\ -0.1607 & 0.1272 \end{pmatrix}$$

y su número condición es 16.25. El rango de M_{cd} es

$$\text{rango}(M_{cd}) = 2.$$

III-K1. Especificaciones de diseño: Las especificaciones de diseño del control para el sistema son dos:

1. Tiempo de establecimiento ≤ 5 segundos
2. El valor de la referencia para el sistema lineal es 0.1. (0.7581 para el sistema no lineal).

III-L. Control PID discreto

Al trazar la curva de reacción se obtienen los valores de L y R para la aplicación de los métodos heurísticos. La Fig. 22 muestra la curva trazada.

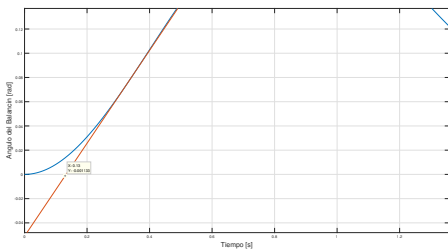


Fig. 22. Pendiente con $L = 0.125$ y $R = 0.3833$

Para tiempo discreto se tiene que

$$L = L + \frac{T_s}{2}$$

Con los valores encontrados se aplican entonces los métodos heurísticos obteniendo los resultados de las tablas V y VI.

TABLA V
MÉTODO ZIEGLER-NICHOLS

Acción	K_p	T_i	T_d
P	14.9	-	-
PI	12.42	0.53	-
PID	17.9	0.35	0.088

TABLA VI
MÉTODO CHIEN - HRONES-RESWICK

Mp	0%			20%		
Acción	K_p	T_i	T_d	K_p	T_i	T_d
P	4.47	-	-	10.44	-	-
PI	8.95	0.7	-	10.44	0.4	-
PID	14.16	0.42	0.74	17.9	0.35	0.074

Se diseñan controles P, PI y PID para el control del sistema con una referencia de 0.1 rad. también se aplica una saturación que limita las entradas al sistema en un rango de $[-2,2]$.

La Fig. 23 presenta los resultados de aplicar el control con los tres métodos. Por el método de Ziegler-Nichols (Fig. 23a) ninguno de los controles funciona, de hecho, desestabilizan el sistema. La Fig. 23b muestra que para el método de Chien - Hrones-Reswick, el control P es el único estable con error estacionario. en la Fig. 23c también se presenta inestabilidad en el control P, PI y el PID.

La tabla VII muestra los valores para los parámetros obtenidos a partir del ensayo y error.

TABLA VII
MÉTODO SINTONIZACIÓN DE PARÁMETROS

Acción	K_p	T_i	T_d
P	4.47	-	-
PI	4.47	1.4	-
PID	6	0.26	0.5

Por sintonización se hallaron los parámetros para un control que controla el sistema de la forma deseada. En la Fig 24 se observa que el control P, que presenta oscilaciones no estabiliza el sistema en la referencia deseada, el control PI logra estabilizar el sistema de forma lenta presentando bastantes oscilaciones, por otro lado, el control PID estabiliza rápidamente el sistema en el valor deseado, no presenta oscilaciones y no tiene error estacionario. En la Fig. 24 se observa la acción con un saturador de 2 a -2 N, para el caso de P y PI las acciones de control son mas lentas, el P no logra llegar al valor deseado y el PI lo hace lentamente, se nota como la acción de control disminuye a medida que el error disminuye, para el caso del PI se observa que la acción de control es rápida y el sistema se estabiliza en el valor deseado en menos de 2 segundos.

III-L1. Control del sistema no lineal: Luego de encontrar los valores del PID se aplica el control sobre un sistema no lineal, realizando el diagrama de simulación que se muestra en la Fig. 25.

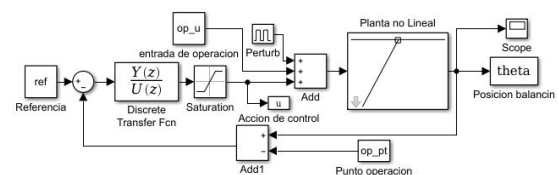
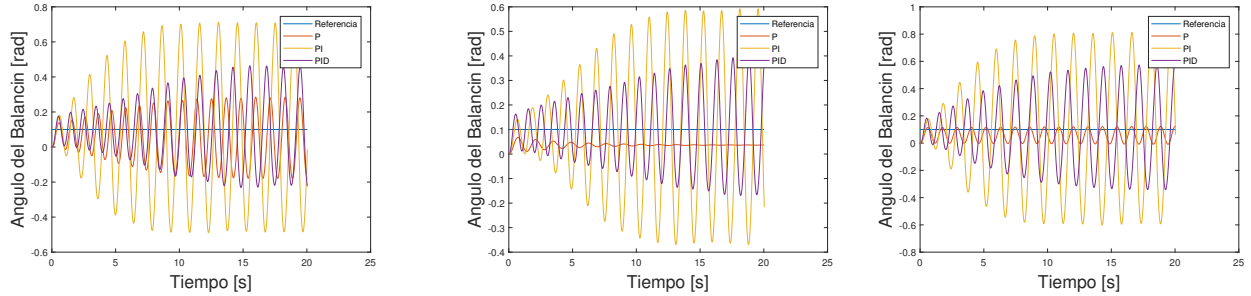


Fig. 25. Diagrama de simulación para el control de la planta no lineal

Usando los parámetros de la tabla VII se observa, en la Fig. 26, se observa que el sistema tiende a inestabilidad crítica al

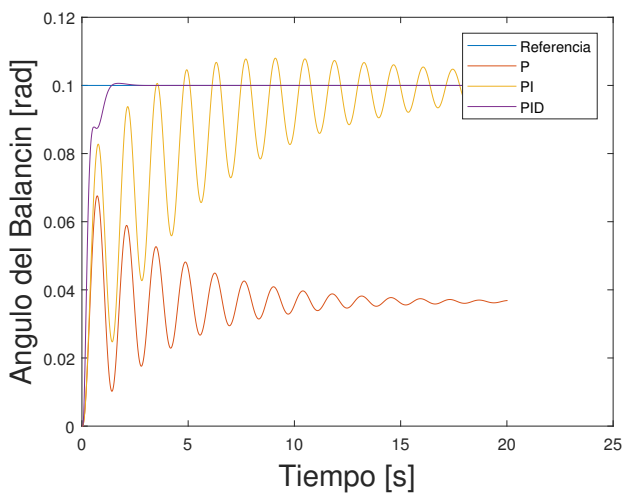


(a) Control con los parámetros calculados por el método de Ziegler-Nichols

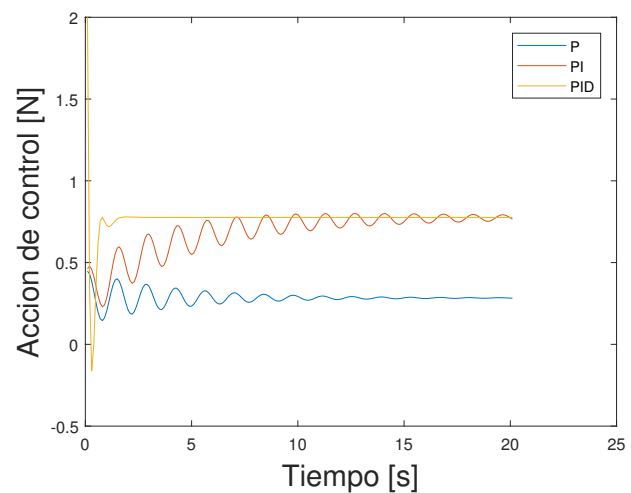
(b) Control con los parámetros calculados por el método de Hrones-Reswick $M_p = 0\%$

(c) Control con los parámetros calculados por el método de Hrones-Reswick $M_p = 20\%$

Fig. 23. Control P, PI, y PID aplicando los diferentes métodos heurísticos



(a) Respuesta del ángulo del balancín con los parámetros del PID



(b) Acción de control

Fig. 24. Control PID por sintonización de parámetros

rededor de la referencia. La Fig. 26b muestra cómo la acción de control llega a los límites de la saturación.

Finalmente se ajustan nuevamente los valores del PID para controlar el sistema no lineal y se le agregan perturbaciones al sistema. Las perturbaciones constan de un tren de impulsos con magnitud 2 y periodo 5. Las condiciones iniciales que se le dan al sistema son de (0,0). Como se observa en la Fig. 27a, se presenta el mayor sobre impulso en el instante inicial, que es cuando el sistema se encuentra más lejos del punto de operación. En la Fig. 27b también se observa que la acción de control sólo toca los límites en el primer instante.

III-M. Realimentación del estado

Con las matrices del sistema lineal en tiempo continuo (sección III-E) y con *acker()* se calcula un $K = 7.17$. La Fig. 28 se muestra el diagrama de simulación con el que se controla el sistema no lineal.

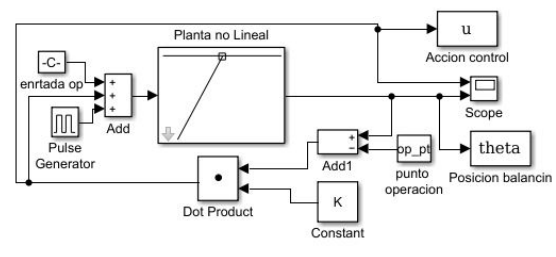
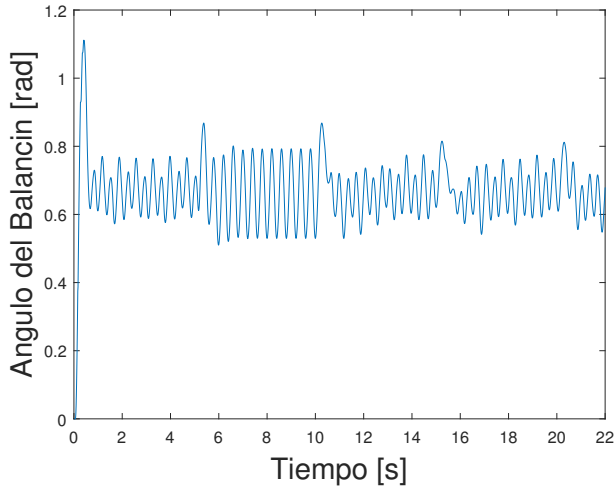


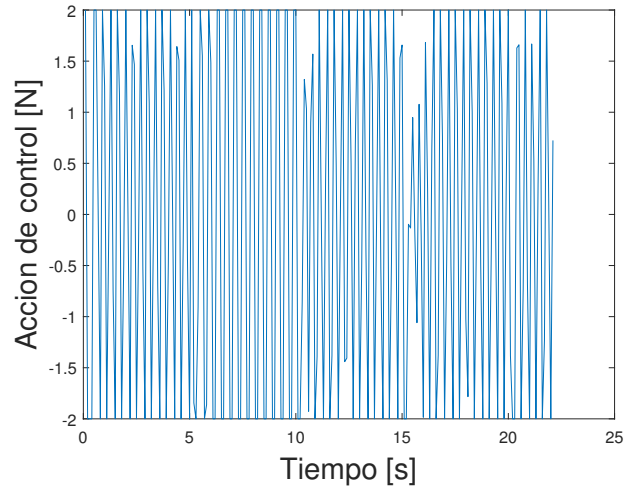
Fig. 28. Diagrama de simulación para el control de la planta no lineal por realimentación del estado

La Fig. 29 presenta el control implementado sobre el sistema no lineal. Las condiciones iniciales del sistema son (0,0), por lo que inicialmente se encuentra lejos del punto de operación. El primer sobre impulso es el de mayor magnitud. También se observa que el tiempo de establecimiento es de aproximadamente 15 segundos.

III-M1. Control por realimentación del estado con eliminación del error estacionario: Se observa en la figura que el control de este método es capaz de controlar el sistema, estabilizándolo en la posición deseada, el sistema se logra estabilizar en aproximadamente 10 segundos. En 1 FIGURA

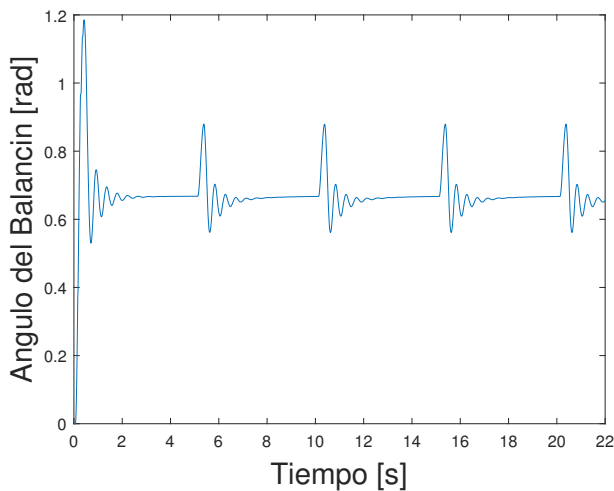


(a) Posición del balancín controlada por el PID.

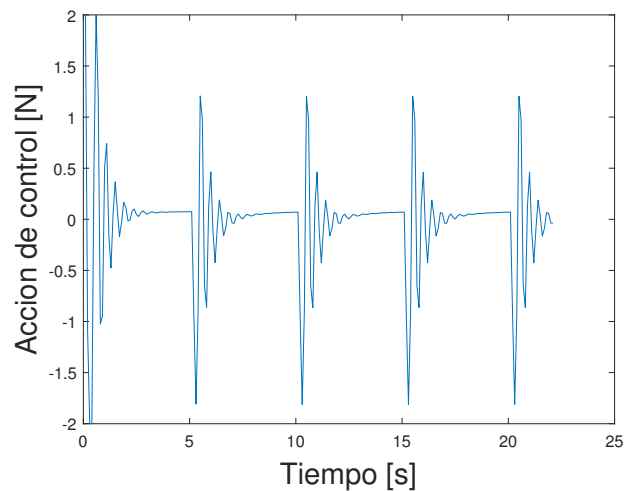


(b) Acción de control

Fig. 26. Control PID aplicado a la planta no lineal



(a) Posición del balancín controlada por el PID.



(b) Acción de control

Fig. 27. Control PID aplicado a la planta no lineal

se nota que la acción de control disminuye proporcionalmente con el error hasta que el sistema se estabiliza.

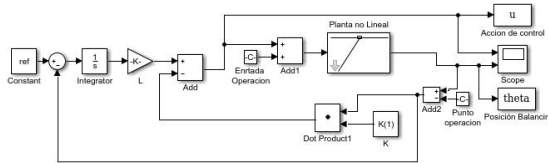


Fig. 30. Diagrama de simulación para el control de la planta no lineal por realimentación del estado con eliminación del estado estacionario

III-M2. Realimentación del estado con eliminación del estado estacionario:

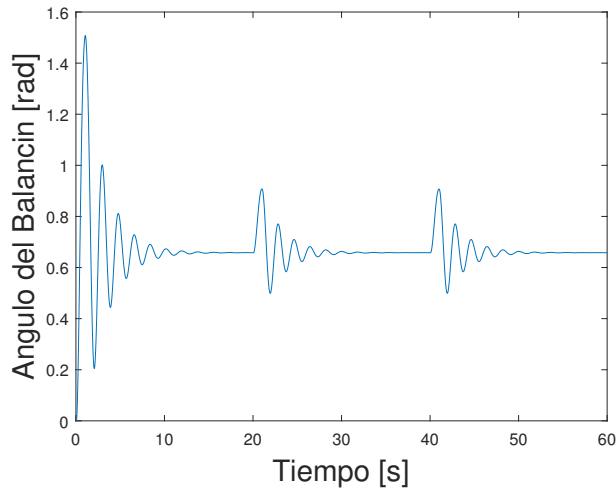
IV. ANÁLISIS

IV-A. Validación del modelo

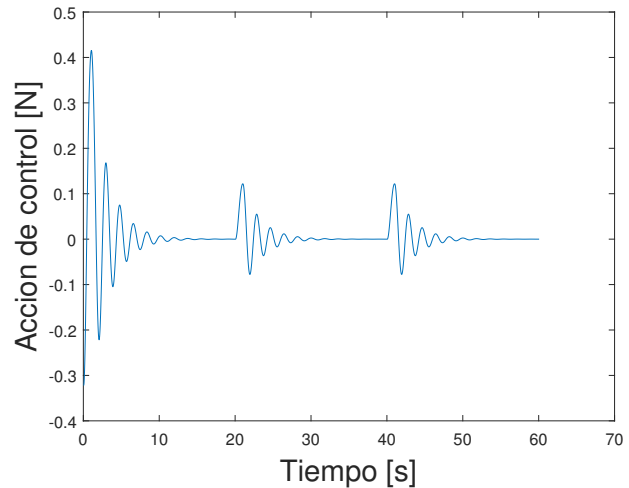
El comportamiento del sistema en las simulaciones ante los cambios de las condiciones iniciales y los valores de los parámetros corresponde al comportamiento de un péndulo, ver las Figs. 5a, 5b y 5, se observa que tiene un punto de equilibrio estable a 0 grados respecto a la vertical y presenta un comportamiento lineal para aproximaciones de θ igual a $\sin \theta$ y no lineal para ángulos que no cumplen dicha igualdad. De esta forma se consigue validar el modelo.

IV-B. Respuesta a diferentes entradas

Se encuentra la magnitud del impulso necesario para que el péndulo de una vuelta de 360 grados, 6.28 rad aproximadamente, es de 59 N. La Fig. 6 muestra cómo el sistema reduce

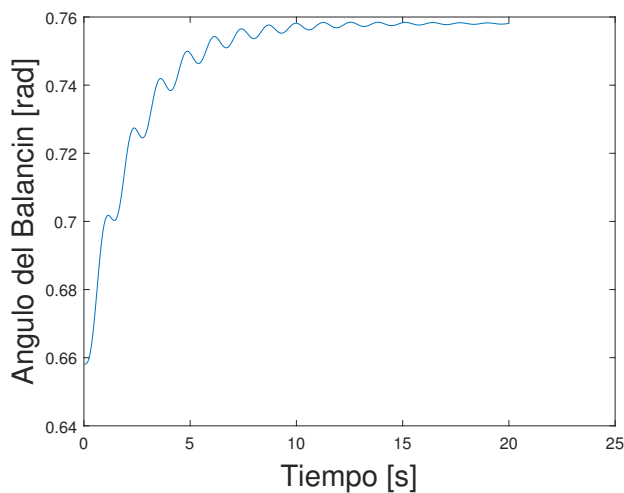


(a) Respuesta del ángulo del balancín con perturbación de tren de impulsos

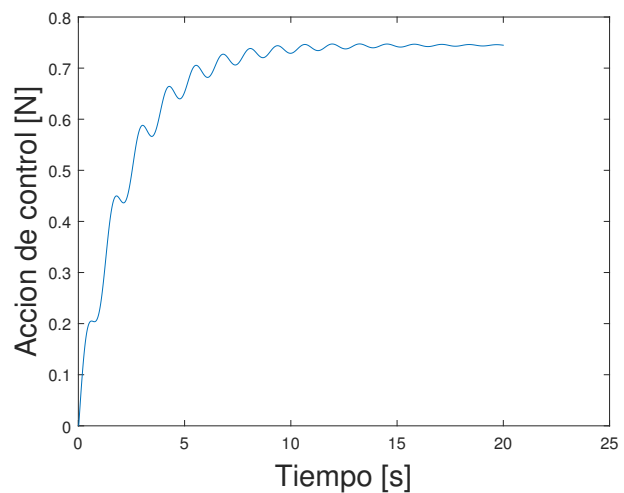


(b) Acción de control

Fig. 29. Control por realimentación del estado para el sistema no lineal



(a) Respuesta del ángulo del balancín



(b) Acción de control

Fig. 31. Control por realimentación del estado para el sistema no lineal con eliminación de error estacionario

la velocidad mientras llega a los 180 grados, que es cuando la masa del motor trata de frenar el movimiento.

De las repuestas que se muestran en las Figs. 7 y 8 se puede apreciar que los estímulos cíclicos aplicados al sistema generan también respuestas con comportamiento armónico o cíclico.

Al variar los valores de los parámetros el comportamiento del sistema es similar cambiando principalmente en su frecuencia y los tiempos de establecimiento. La variación del parámetro c hace que la masa de la barra tenga un momento influyente en el comportamiento del sistema.

IV-C. Variación de parámetros

Se observa la incidencia en la estabilidad según se varían los parámetros, en este caso, la distancia c es de interés ya que cambia los momentos de inercia de la barra respecto al

centro de rotación así: cuando $c > 0$ el momento de inercia de la barra actúa en el mismo sentido que el que el motor haciendo que el tiempo de estabilización sea mayor a cuando $c < 0$ dado que en este caso el momento de inercia se opone al momento generado por el motor.

IV-D. Linealización del sistema

Al obtener la curva de linealidad (Fig. 12), se observa que el último valor de la entrada antes de que el sistema se desestabilice es de 9.8 como se esperaba en la sección III-E1. durante las simulaciones del sistema no lineal, cuando la entrada era mayor 6 el sistema ya se desestabilizaba. Este fenómeno se debe a que la inercia de la barra provoca que sea más complicado parar su movimiento y, por lo tanto, siga con su giro; mientras que para la curva de linealidad se fueron aplicando pequeñas entradas que no provocaban

muchas oscilaciones en el sistema logrando alcanzar la entrada de 9.8 sin que el sistema se desestabilice.

IV-E. Estabilidad

Como se muestra en la Fig. 16, el diagrama de fase presenta un foco estable en el punto de linealización para la entrada de $u = 6$. Además, al cambiar las condiciones iniciales, el sistema tiende nuevamente al foco. Esto demuestra una estabilidad local del sistema en el punto de linealización.

Se observa que los polos del sistema se encuentran en el SMI y tienen parte imaginaria, por lo que se entiende que el sistema es estable y presenta oscilaciones.

Por el método de Routh - Hurwitz se encuentra que hay un valor de c que puede desestabilizar el sistema, ya que se genera un par entre el peso del motor y el del centro de masa de la barra, provocando que el sistema siga girando.

IV-E1. Comparación del sistema lineal con el no lineal:

De la Fig. 3 se puede observar que la similitud entre la respuesta del sistema no lineal y el sistema linealizado tanto con la función de transferencia como a partir de las ecuaciones de estado es la misma para entradas que se encuentren cercanas al punto de operación mientras que si la entrada se empieza a alejar de este punto en dirección positiva o negativa la respuesta del sistema no lineal empieza a alejarse del valor de estabilidad de los sistemas lineales.

IV-F. Lugar de las raíces

Al realizar el análisis de estabilidad mediante Rout-Hurwitz para el parámetro ' c ' se encuentra que para valores mayores a $-1/3$ se garantizaba la estabilidad del sistema en el modelo lineal, sin embargo, analizando para el mismo valor de ' c ' en el modelo no lineal esta estabilidad no se garantiza la estabilidad por que en este último es más sensible a los valores de la entrada que a los valores del parámetro

IV-G. Análisis frecuencial

Al haber seleccionado el período de muestreo a partir del tiempo de crecimiento de la respuesta del sistema en Simulink se logra que en la respuesta frecuencial el ancho de banda fuera la mitad que la frecuencia de Nyquist. No es posible determinar los márgenes de estabilidad mediante el diagrama de bode dado que por el método descrito en la sección II-L la línea horizontal no corta el digrama de ganancia lo que significa que la ganancia es máxima para cualquier frecuencia y por lo tanto el sistema es estable, Se comprueba que el sistema es de fase mínima ya que el orden relativo del sistema es 2 y el cambio de fase fue de -180 .

IV-H. Control

Como se muestra en la sección II-M, el sistema analizado es controlable para ambos casos, lineal y discreto, debido a que el rango de la matriz de controlabilidad es igual al orden del sistema. Además, el número de condición es muy bajo por lo que presenta buena sensibilidad al control.

IV-H1. Control PID discreto: Al aplicar los métodos heurísticos, el mejor resultado fue el control P por el método de Hrones-Reswick $M_p = 0\%$ en la Fig. 23b. La característica que más resalta en este método es que tiene el menor K_p . Sin embargo, este control no satisface las especificaciones de diseño. En la Fig. 24a se observa que era necesario disminuir el valor de K_p para que los controles PI y PID estabilizaran el sistema ya que la respuesta proporcional era muy grande. Al aplicar el control al sistema no lineal se observa, en la Fig. 26, que el sistema tiende a la estabilidad crítica. Para corregir este problema se aumento hasta casi 10 veces el valor del integrador para disminuir las oscilaciones. El sistema no lineal presenta un sobre impulso inicial que hace que la acción de control llegue al límite establecido por la saturación. Esto se debe a la lejanía de las condiciones iniciales con el punto de operación y la referencia. También se observa que, aplicando la saturación, es posible aplicar el control en puntos lejos del punto de operación.

IV-H2. Control por realimentación del estado: Al controlar el sistema por realimentación del estado no necesita de una referencia ya que lo que hace este control es llevar el sistema al punto de operación, $(0,0)$ para el sistema lineal y $(0,6581,0)$, para el sistema no lineal. Si se desea que se el sistema se estabilice en otro valor es necesario eliminar el error en estado estacionario. Esto se logra agregando el integrador como se muestra en la Fig. 30. Para este caso el sistema no presenta sobre impulso, debido a que las condiciones iniciales están cerca del punto de operación y de la referencia.

V. CONCLUSIONES

Se comprueba que los métodos analíticos guardan coherencia con los comportamientos simulados por medio de las herramientas de software usadas, esta comprobación es un ejercicio de estudio sumamente enriquecedor.

La linealización del sistema no lineal en un punto permite buenas aproximaciones respecto al modelo no lineal, se concluye que se debe tener presente el margen de entradas en las cuales la respuesta no presenta un error considerable entre ambos modelos; en el caso del balancín, como es un movimiento pendular, usualmente se consideran buenas aproximaciones siempre que se cumpla que el seno de θ es igual a θ , de esta forma se evidencia cómo a medida que las entradas, fuerzas, alejan el sistema de la posición inicial en un ángulo que no cumpla con esta consideración la respuesta del sistema lineal ya no aproxima con precisión tolerable la respuesta del sistema no lineal.

El valor dado al parámetro f (coeficiente de fricción) pone los polos muy cerca al eje imaginario por lo cual se presentan altas oscilaciones. Esto permite concluir que físicamente el medio (aire) no es un buen amortiguador para el balancín ya que su densidad es baja.

A medida que aumenta el parámetro f (coeficiente de fricción) disminuyen las oscilaciones. Físicamente esto se puede interpretar como que la viscosidad del medio donde el balancín se encuentra, aumenta. De esta forma se comprueba la relación entre dicho parámetro y el coeficiente de amortiguación en la función de transferencia.

Al pivotar el sistema en un punto distinto al centro de masa de la barra, se involucran fuerzas que pueden modificar fuertemente el comportamiento del balancín, haciéndolo inestable o estable según la variación de dicho parámetro, esto sucede por que el sistema consigue dar una vuelta al rededor del pivote y dado que la entrada U es constante la ventaja mecánica de la inercia de la barra hace que el sistema pueda seguir girando al rededor de ese punto, similarmente se encuentra que para una entrada $|u| > 9,81$ N el sistema presentará el mismo comportamiento.

El control PID presenta el mejor desempeño ya que cumplió con los requerimientos establecidos de tiempo de establecimiento y eliminación del error en estado estacionario. El control por realimentación del estado presenta un alto tiempo de estabilización con respecto al PID, sin embargo, elimina efectivamente el error en estado estacionario.

REFERENCIAS

- [1] V. V. L. Rosa, *Control de posición de un balancín con motor y hélice.*, Universidad de Valladolid Std., jun 2012. [Online]. Available: <https://uvadoc.uva.es/bitstream/10324/1895/1/PFC-P%2026.pdf>
- [2] J. D. Hoffman and S. Frankel, *Numerical methods for engineers and scientists.* CRC press, 2001.
- [3] C. M. de Jesús Vélez Sánchez, “Guía de proyecto,” <https://plus.google.com/+CarlosMVelezS>, jul 2018, documento guía.